Contas com infinitesimais...

Análise não-standard ("NSA") — ultrafiltros, complicada
(bem conhecida)

Análise semi-standard ("SSA") – filtros, mais simples
(?)

Contas em SSA podem ser traduzidas para contas standard

O processo inverso dessa tradução (em standard $\leftarrow$ SSA $\leftarrow$... — quem é o "..."?) nos leva a uma linguagem muito interessante, em que temos uma espécie de isomorfismo de Curry-Howard.

Curry-Howard $\to$ categorias: essa linguagem dá uma notação bastante boa pra topoi;

Outras semânticas: parece que essa linguagem com infinitesimais corresponde a um fragmento de Lógica Linear.

Introdução rapidíssima à Análise Não-Standard (NSA)

Um dos objetivos da NSA é nos permitir falar de infinitesimais.

Como?

Idéia ingênua: infinitesimais vão ser representados por seqüências de reais tendendo a zero.

Universo standard: **Set**. Universo não-standard: $\mathbf{Set}^{\mathbb{N}}$.

Cada cara α de **Set** pode ser levado numa seqüência constante $(\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$.

Existe uma cópia do universo standard dentro do universo não-standard. Os caras da cópia também são chamados de standard.

Correção da idéia ingênua: queremos identificar certas seqüências.

Duas seqüências $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ e $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ são identificadas se elas coincidem em "quase todo ponto". Melhor: num "conjunto grande" de pontos, onde os "conjuntos grandes" são, por definição, os que pertencem ao "conjunto dos conjuntos grandes", $\mathcal{F}$.

Se sabemos $\mathcal{F}$ sabemos a relação de equivalência.

Para que "$(\alpha_n) \sim (\beta_n) \Leftrightarrow (\alpha_n)$ e (β_n) coincidem num conjunto grande" seja realmente uma relação de equivalência precisamos que $\mathcal{F}$ seja um filtro:

- um conjunto maior que um conjunto grande também é grande,
- a interseção de dois conjuntos grandes é grande,
- o "tudo" ($\mathbb{N}$) é grande.

E para que a relação de equivalência não identifique todo mundo, queremos:

- o "vazio" não é grande.

Definições: um conjunto é *pequeno* se ele o complemento dele é grande; um conjunto é *médio* se ele não é nem pequeno nem grande.

Um exemplo: os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ são pequenos. Os cofinitos são grandes. Os outros (exemplo, o conjunto dos pares) são médios. Vamos chamar esse filtro de $\mathcal{N}$.

Tome $\epsilon = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$.

Interprete $\epsilon < 1/3$: dá uma seqüência de valores de verdade, $(\dashv, \dashv, \dashv, \top, \top, \top, \top, \ldots)$, que está na mesma classe de equivalência que o $\top$, i.e., o $(\top, \top, \top, \top, \ldots)$; $\epsilon < 1/3$ é "verdade" sob o ponto de vista desse filtro: $(\epsilon < 1/3)_{/\mathcal{N}} = \top$.

$(\epsilon \neq 0)_{/\mathcal{N}} = \top$

$(|\epsilon| < r)_{/\mathcal{N}} = \top$ para qualquer r real standard maior que zero.

Ôba.

Problema: em $(\mathbf{Set}^{\mathbb{N}})_{/\mathcal{N}}$ (que vamos chamar de $\mathbf{Set}^{\mathcal{N}}$) temos mais de dois valores de verdade: $(\top, \dashv, \top, \dashv, \ldots)$ não é equivalente nem a $(\top, \top, \top, \ldots)$ nem a $(\dashv, \dashv, \dashv, \ldots)$, já que só coincide com cada um deles num conjunto médio.

Uma conserto pra isso: ao invés de usar $\mathcal{N}$ use um filtro que obedeça as condições acima e divida todo mundo em grandes e pequenos, sem médios. (Um filtro sem médios é chamado de "ultrafiltro").

Generalização:

Ao invés de $\mathbb{N}$ como conjunto-índice, $\mathbb{I}$ (qualquer).

$\mathcal{F}$ um filtro sobre $\mathbb{I}$.

$\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre $\mathbb{I}$.

Abuso de linguagem: vamos continuar usando a terminologia e a notação de seqüências mesmo quando ao invés de $\mathbb{N}$ tivermos um $\mathbb{I}$ qualquer.

Nomes:

$\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ é um (ou "o") universo *semi-standard*.

$\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ é um (ou "o") universo *não-standard*.

Ultrafiltros são esquisitos e anti-intuitivos; não dá pra pegar explicitamente um ultrafiltro não-trivial, i.e., em que $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ tenha mais gente que **Set**. Argh.

Truque: podermos fazer contas com infinitesimais em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$.

Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ temos o teorema da transferência, em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ temos algo mais fraco...

Set	$\mathbf{Set}^{\mathbb{N}}$
0	$(0, 0, 0, ...)$
π	$(\pi, \pi, \pi, ...)$
sen	$(\mathrm{sen}, \mathrm{sen}, \mathrm{sen}, ...)$
ϵ	$(1, 1/2, 1/3, ...)$
f	$(f_1, f_2, f_3, ...)$
$f(x, y)$	$(f_1(x_1, y_1), f_2(x_2, y_2), ...)$
$\top$	$(\top, \top, \top, ...)$
$\dashv$	$(\dashv, \dashv, \dashv, ...)$
$\|\epsilon\|<1/10$	$(\|1\|<1/10, \|1/2\|<1/10, \|1/3\|<1/10, ...)$

Dá pra "transferir" as duas sentenças abaixo:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ |\mathrm{sen}\, x| \leq 1$$

$$\forall x, y, z, n \in \mathbb{N} \ \ (x, y, z \geq 1) \wedge (n \geq 2) \Rightarrow (x^n + y^n \neq z^n)$$

Expressões sem variáveis livres, com todos os quantificadores limitados, com todas as constantes standard, retornando um valor de verdade...

são verdadeiras em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ *se e só se elas são verdadeiras em* **Set***!*

Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ os quantificadores quantificam sobre muito mais gente.

Problema: a sentença que diz que a união de quaisquer dois conjuntos A e B existe,

$$\forall A \ \ \forall B \ \ \exists C \ \ \forall x \ \ x \in C \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B),$$

não está numa forma em que possamos mostrar que ela vale em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ aplicando o teorema da transferência nela em **Set**. Ela é verdade em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ por outros motivos. Mais sobre isso no final.

SSA, NSA e continuidade

Em toda essa página f, x_0 são standard, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.
"p.i.p." = "ponto infinitamente próximo".

Outro exemplo de filtro: $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ = vizinhanças do 0.
Outro: as "vizinhanças furadas" do 0 em $\mathbb{R}$.

Teorema chave:
(i) f contínua em x_0
$\Leftrightarrow$ (ii) f leva todo p.i.p. de x_0 num p.i.p. de $f(x_0)$ ($\forall\mathbb{I}$, $\forall\mathcal{F}$)
$\Leftrightarrow$ (iii) f leva o p.i.p. de x_0 natural, x_1, num p.i.p. de $f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ (iv) f leva todo p.i.p. de x_0 num p.i.p. de $f(x_0)$ ($\forall\mathbb{I}$, $\forall\mathcal{U}$; versão NSA do (ii))

Definições:
x_1 está infitamente próximo de x_0
$\Leftrightarrow \forall V$ viz standard de x_0 temos $(x_1 \in V)_{/\mathcal{F}} = \top$.

x_1 é o p.i.p. de x_0 natural
$\Leftrightarrow x_1$ é a identidade $\mathbb{I} \to X$, $\mathbb{I} = X$, $\mathcal{F}$ é o filtro das vizinhanças de x_0.

Obs: $(x_1 \in V)_{/\mathcal{F}} = \top$ para toda vizinhança standard V de x_0...

Demonstração do teorema chave:
(i) $\Rightarrow$ (ii):
$f(x_1)$ é um p.i.p. de $f(x_0)$
$\Leftrightarrow \forall V$ vizinhança standard de $f(x_0)$ temos $(f(x_1) \in V)_{/\mathcal{F}} = \top$
mas $f(x_1) \in V$ é verdadeiro exatamente na imagem inversa de V por f, que é uma vizinhança de x_0 já que f é contínua.

(i) $\Rightarrow$ (iii): caso particular de (i) $\Rightarrow$ (ii).

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii):
Se f não é contínua então existe uma vizinhança V de $f(x_0)$ cuja imagem inversa por f, $f^{-1}(V)$, não é uma vizinhança de x_0.

$f(x_1) \in V$ é verdade exatamente em $f^{-1}(V)$, que não é uma vizinhança de x_0, e portanto $(f(x_1) \in V)_{/\mathcal{F}} \neq \top$.

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii): use o p.i.p. natural como contra-exemplo (recicle $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii))

Limites:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

$\Leftrightarrow$ f leva o p.i.p. natural de x_0 (agora usando vizinhanças furadas) num p.i.p. de a.

Exemplo: queremos ver que $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

Troque n por $\omega = (1, 2, 3, \ldots)$ e veja que a diferença entre $(1 + \frac{x}{\omega})^\omega$ e e^x é um infinitesimal.

Obs: ω é um "ponto infinitamente próximo do infinito" em $\mathbb{N}$ com as definições adequadas ($\mathbb{I} = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{\, A \in \mathbb{N} \mid A \text{ cofinito} \,\}$)

$$
\begin{aligned}
\log(1 + \tfrac{x}{\omega})^\omega &= \omega\ \log(1 + \tfrac{x}{\omega}) \\
&= \omega\ (\log 1 + ((\log' 1) + \mathbf{o}_1)\ \tfrac{x}{\omega}) \\
&= \omega\ (0 + (1 + \mathbf{o}_1)\ \tfrac{x}{\omega}) \\
&= \omega\ (1 + \mathbf{o}_1)\ \tfrac{x}{\omega} \\
&= (1 + \mathbf{o}_1)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1 + \tfrac{x}{\omega})^\omega &= e^{((1+\mathbf{o}_1)\ x)} \\
&= e^{(x + \mathbf{o}_1 x)} \\
&= e^{(x + \mathbf{o}_2)} \\
&= e^x + \mathbf{o}_3.
\end{aligned}
$$

$\forall \omega$ p.i.p. ∞ em $\mathbb{N}$ $\quad \exists \mathbf{o}_1$ p.i.p. 0 em $\mathbb{R}$...
$\forall \mathbf{o}_1$ p.i.p. 0 em $\mathbb{R}$ $\quad \exists \mathbf{o}_2$ p.i.p. 0 em $\mathbb{R}$...
$\forall \mathbf{o}_2$ p.i.p. 0 em $\mathbb{R}$ $\quad \exists \mathbf{o}_3$ p.i.p. 0 em $\mathbb{R}$...

Passagem para standard:
$\omega = \omega(\mathbb{i})$ $\qquad$ (identidade)
$\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_1(\mathbb{i})$
$\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_2(\mathbb{i})$
$\mathbf{o}_3 = \mathbf{o}_3(\mathbb{i})$
$\lim_{\mathbb{i} \to \infty} \omega(\mathbb{i}) = \infty$
$\lim_{\mathbb{i} \to \infty} \mathbf{o}_1(\mathbb{i}) = 0$
$\lim_{\mathbb{i} \to \infty} \mathbf{o}_2(\mathbb{i}) = 0$
$\lim_{\mathbb{i} \to \infty} \mathbf{o}_3(\mathbb{i}) = 0$

$\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y)\,dy$, versão 1 (grande e feia)

$$
\begin{aligned}
F(x) &:= \int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y)\,dy \\
F(x+\epsilon) &= \int_{y=0}^{y=a(x+\epsilon)} f(x+\epsilon,y)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a(x)} f(x+\epsilon,y)\,dy + \int_{y=a(x)}^{y=a(x+\epsilon)} f(x+\epsilon,y)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y) + (f_x(x,y) + \mathbf{o}_1(y))\epsilon\; dy \\
&\qquad + \int_{y=a(x)}^{y=a(x+\epsilon)} f(x,a(x)) + \mathbf{o}_2(y)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y)\,dy + \left(\int_{y=0}^{y=a(x)} f_x(x,y)\,dy + \mathbf{o}_3\right)\epsilon \\
&\qquad + (a'(x) + \mathbf{o}_4)(f(x,a(x)) + \mathbf{o}_5)\epsilon \\
&= \int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y)\,dy + \Bigg(\int_{y=0}^{y=a(x)} f_x(x,y)\,dy \\
&\qquad +a'(x)f(x,a(x))\Bigg)\epsilon + \mathbf{o}_6\epsilon \\
F'(x) &= \int_{y=0}^{y=a(x)} f_x(x,y)\,dy + a'(x)f(x,a(x)) + \mathbf{o}_6 \\
F'(x) &= \int_{y=0}^{y=a(x)} f_x(x,y)\,dy + a'(x)f(x,a(x))
\end{aligned}
$$

$\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{y=0}^{y=a(x)} f(x,y)\,dy$, versão 2 (maior e mais feia)

Mesma coisa, só que com ϵ, $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$, $\mathbf{o}_3$, $\mathbf{o}_4$, $\mathbf{o}_5$ e $\mathbf{o}_6$ dependendo também de $\mathbb{i}$ (repare que $\mathbf{o}_1$ e $\mathbf{o}_2$ já dependem de y)

$\frac{d}{dx}\int_{y=0}^{y=a_0} f(x,y)\,dy$, versão 3 (bem mais curta)

$$
\begin{aligned}
F(x) &:= \int_{y=0}^{y=a_0} f(x,y)\,dy \\
F_1 &= \int_{y=0}^{y=a_1} f_1\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a_0} f_1\,dy + \int_{y=a_0}^{y=a_1} f_1\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a_0} f_0 + (f_{x0} + \mathbf{o}_1)\epsilon\ dy \\
&\qquad + \int_{y=a_0}^{y=a_1} f(x,a_0) + \mathbf{o}_2\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=a_0} f_0\,dy + \left(\int_{y=0}^{y=a_0} f_{x0}\,dy + \mathbf{o}_3\right)\epsilon \\
&\qquad + (a_{x0} + \mathbf{o}_4)(f(x,a_0) + \mathbf{o}_5)\epsilon \\
&= \int_{y=0}^{y=a_0} f_0\,dy + \Bigg(\int_{y=0}^{y=a_0} f_{x0}\,dy \\
&\qquad + a_{x0} f(x,a_0)\Bigg)\epsilon + \mathbf{o}_6\epsilon \\
F'(x) &= \int_{y=0}^{y=a_0} f_{x0}\,dy + a_{x0} f(x,a_0) + \mathbf{o}_6 \\
F'(x) &= \int_{y=0}^{y=a_0} f_x(x,y)\,dy + a'(x) f(x,a(x))
\end{aligned}
$$

Dicionário:

$x_0 = x$	$\epsilon = \epsilon(\mathbb{i})$
$x_1 = x + \epsilon$	$\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_1(y, \mathbb{i})$
$f_0 = f(x_0, y)$	$\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_2(y, \mathbb{i})$
$f_1 = f(x_1, y)$	$\mathbf{o}_3 = \mathbf{o}_3(\mathbb{i})$
$f_{x0} = f_x(x_0, y)$	$\mathbf{o}_4 = \mathbf{o}_4(\mathbb{i})$
$f_{x1} = f_x(x_1, y)$	$\mathbf{o}_5 = \mathbf{o}_5(\mathbb{i})$
$a_0 = a(x_0)$	$\mathbf{o}_6 = \mathbf{o}_6(\mathbb{i})$
$a_1 = a(x_1)$	
$a_{x0} = a'(x_0)$	
$a_{x1} = a'(x_1)$	

Idéia (!!!): na maior parte dos problemas que queremos resolver com infinitesimais há muito poucos objetos naturais de cada "tipo".

Muitas das definições do dicionário são óbvias.

Deve ser possível formalizar uma linguagem em que as contas curtas fazem sentido e as definições do dicionário aparecem automaticamente.

Exemplo: temos uma função $f : X \to Y$ e uma $g : Y \to Z$; X é o "espaço dos x", $\mathbf{E}_x$, Y é o "espaço dos ys", etc; f é uma função que leva 'x'zes em 'y's, i.e., f é de tipo $x \to y$; f é um ponto do espaço de funções $\mathbf{E}_{x\to y}$.

x_0 e x_1 são pontos de $\mathbf{E}_x$.

Pense em x_0 standard e x_1 infinitamente próximo de x_0.

$$\dfrac{\dfrac{x_0 \quad x \to y}{y_0} \qquad y \to z}{z_0} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{x_0 \quad f}{f(x_0)} \quad g}{g(f(x_0))}$$

$$\dfrac{\dfrac{x_1 \quad x \to y}{y_1} \qquad y \to z}{z_1} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{x_1 \quad f}{f(x_1)} \quad g}{g(f(x_1))}$$

E mais: $dx := x_1 - x_0$, ou $x_1 := x_0 + dx$; idem para y e z.

Agora $\frac{dy}{dx}$ faz sentido (se $dx \neq 0$ em quase todo $\mathbb{i}$).

Se f é derivável, $\frac{dy}{dx} = y_x + \mathbf{o} = f'(x_0) + \mathbf{o}$ $\quad (y_x = f'(x_0)$ é standard)

Exemplo sério 1: "cálculo até uma certa precisão".

Fixe um infinitesimal ϵ.

Um $\langle 0 \rangle x$ é uma soma $x_0 + \mathbf{o}$, onde x_0 é um standard e $\mathbf{o}$ é um infinitesimal.

Um $\langle 4 \rangle x$ é uma soma $x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + x_3\epsilon^3 + (x^4 + \mathbf{o})\epsilon^4$, onde os x_i são standard e o $\mathbf{o}$ é um infinitesimal.

Nem todo hiperreal é um $\langle 4 \rangle x$ (contra-exemplos fáceis: $\sqrt{\epsilon}$ e $\omega = (1, 2, 3, \ldots)$) mas os que são tem decomposição única em $x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + x_3\epsilon^3 + (x^4 + \mathbf{o})\epsilon^4$.

Se $x \to y$ é suave o suficiente ($\mathcal{C}^4$),

$$\frac{\langle 4 \rangle x \quad x \to y}{\langle 4 \rangle y}$$

e não precisamos escrever as fórmula explícitas que dão os y_i a partir dos x_i e das derivadas y_x, y_{xx}, y_{xxx}, ...

$\langle 4 \rangle x$ e $\langle 4 \rangle y$ podem ser tomados como classes de equivalência.

Exemplo sério 2: teorema da função inversa.

$$\frac{x_0 \quad x \to y}{y \to x}$$

Dois corolários: forma local das imersões ($t \to x, y$ é a imersão, e $t \to x$ é inversível), e o teorema da função implícita ($x, y \to f$, e queremos a $x \to y$ que se mantenha sobre a curva de nível $f = f_0$, onde $f_0 = f(x_0, y_0)$).

$$\cfrac{\cfrac{t \quad \cfrac{t\to x\wedge y}{t\to x}}{x\to t}\,\mathrm{TFI} \qquad t\to x\wedge y}{x\to y} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{x\wedge y \quad x\wedge y\to f}{f} \qquad \cfrac{x\wedge y \quad x\wedge y\to f}{f\to(x\to y)}\,\mathrm{TFI}}{x\to y}$$

As duas deduções acima em forma normal:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[x]^2 \quad \cfrac{t \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[t]^1 \quad t\to x\wedge y}{x\wedge y}}{x}}{t\to x}\,1}{x\to t}\,\mathrm{TFI}}{t} \qquad t\to x\wedge y}{\cfrac{x\wedge y}{y}}}{x\to y}\,2$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x\wedge y \quad x\wedge y\to f}{f} \qquad \cfrac{\cfrac{x\wedge y}{y} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[x]^2 \quad [y]^1}{x\wedge y} \quad x\wedge y\to f}{f}}{y\to f}\,1}{f\to y}\,\mathrm{TFI}}{y}}{x\to y}\,2$$

Exemplo sério 3: derivadas

Regras:

$$\dfrac{x \to y}{x \to y_x} \qquad \dfrac{x_0 \quad x \to y}{y_{x0}}$$

Como obter z a partir de x, $x{\to}y$ e $x,y{\to}z$:

$$\dfrac{x \qquad \dfrac{x \quad x \to y}{y} \qquad x,y \to z}{z}$$

Dois jeitos de derivar esse z com relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}z : \qquad \dfrac{x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x]^1 \qquad \dfrac{x \quad x \to y}{y} \qquad x,y \to z}{z}}{x \to z}\,1}{x \to z_x}}{z_x}$$

$$\frac{d}{dx}z : \qquad \dfrac{x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x]^1 \qquad \dfrac{[x]^1 \quad x \to y}{y} \qquad x,y \to z}{z}}{x \to z}\,1}{x \to z_x}}{z_x}$$

$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial x}z$, usando semi-descargas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((x)^1)^2 \qquad \dfrac{(x)^2 \quad x \to y}{y} \qquad x,y \to z}{z}}{z_x}\,1}{z_{xx}}\,2$$

Notas:

As páginas anteriores são exatamente (módulo correções mínimas) as transparências que eu usei na minha apresentação no encontro de lógica da UFF, em 24 de fevereiro de 2000; esta página é uma espécie de "README" para quem só tiver acesso às transparências, e foram escritas alguns dias depois.

Resuminho da apresentação: eu introduzo rapidamente a análise não-standard ("NSA") e uma versão dela com filtros no lugar de ultrafiltros ("análise semi-standard", ou "SSA"). A SSA tem uma lógica menos familiar que a NSA (mais de dois valores de verdade) e não tem um teorema de transferência tão bom quanto o da NSA, mas SSA não só é suficiente para fazer contas com infinitesimais como contas em SSA admitem uma tradução bem fácil para standard.

Nessa tradução SSA$\to$standard todos os objetos não-standard passam a ser funções de uma variável que varia sobre o conjunto-índice. Se tentamos ir na direção contrária e ao invés de deixar explícitas dependências em variáveis novas nós omitimos todas as dependências "óbvias" nós chegamos a uma linguagem curta bem interessante, que sugere um sistema de dedução natural para infinitesimais.

Coisas que eu menciono rapidamente mas que ainda não tenho nenhuma boa versão escrita: notação curta para categorias, em especial para topoi; outra interpretação para os tipos e as regras que aparecem nas árvores da dedução natural com infinitesimais, inspirada na "Geometry of Interaction" do Girard, que é uma semântica para lógica linear em espaços de Banach.

Observações: 1) as contas das páginas 6, 7 e 8 foram usadas só pra fazer umas mímicas rápidas sobre como os infinitesimais viram funções na tradução para standard; 2) quando eu digo que "NSA é complicada" e "SSA é simples", por exemplo na página 1, é no sentido de que se sabemos que algo é verdade em NSA (i.e., num $\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}/_{\mathcal{U}}$) só sabemos que esse algo é verdade num conjunto grande de índices, e não temos muita intuição sobre o que isso queira dizer; em SSA podemos ter intuições melhores. Por exemplo, se usamos o filtro dos cofinitos sobre os naturais então algo que é verdade é verdade para todo índice $\mathtt{i}$ suficientemente grande em qualquer representante do hipervalor de verdade. 3) No fim da página 4 eu digo que $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ tem uniões de conjuntos por "outros motivos" que eu iria contar no final mas acabei não contando; pra mim o grande motivo (não o mais elementar, mas o mais interessante) é que os $\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}$, $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ e $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ são topoi quando são definidos da forma certa.

Eduardo Ochs, 27 de fevereiro de 2000.
`edrx@inx.com.br`
`http://angg.twu.net/`
`http://www.mat.puc-rio.br/~edrx/`